Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Kern, Bild, Rang**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (3)
Gegeben seien die Vektorräume V und W über einem Körper $\mathbb{K}$ und eine lineare Abbildung $A : V \to W$. Beweisen Sie, dass Kern A ein Unterraum von V und Bild A ein Unterraum von W ist.

Aufgabe 2 (3)
Es seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : V \to W$. Wir wissen bereits, dass folgende Aussagen richtig sind:

1) $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Kern} A + \operatorname{Rang} A$, wobei $\operatorname{Rang} A := \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild} A$

2) A injektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Kern} A = \{0\}$

Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W < \infty$ gilt:

$$A \text{ injektiv} \Leftrightarrow A \text{ surjektiv}$$

Aufgabe 3 (2)
Benutzen Sie die vorige Aufgabe, um folgende Endomorphismen $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf Bijektivität zu untersuchen. Das heißt, überprüfen Sie, bei welchen Abbildungen es sich um Automorphismen handelt.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ 0 \\ 4z-2x \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-x \\ 3y+z \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y-z \\ 2x-2y-6z \\ -3x+3y+7z \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-z \\ 2x-2z \\ 3x-3z \end{pmatrix}$

Tipp: Jede der obigen Abbildungen liefert ein LGS der Form $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösen dieses LGS liefert genau den Kern der entsprechenden Abbildung.

Aufgabe 4 (2)
Bestimmen Sie für die folgenden Abbildungen eine Basis des Kerns, den Rang und überprüfen Surjektivität und Injektivität.

a) $A : \mathbb{R}^2 \to \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $(x, y) \mapsto (x - y) \cdot \cos t,\ t \in \mathbb{R}$

b) $A : \mathbb{R}^3 \to \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $(x, y, z) \mapsto x \cdot \cos t + y \cdot \sin t + z \cdot t,\ t \in \mathbb{R}$

c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_{n\leq 2}$ mit $(x, y, z) \mapsto x \cdot t^2 + y \cdot t + z,\ t \in \mathbb{R}$

d) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_{n\leq 2}$ mit $(x, y) \mapsto 4x \cdot t^2 - 2y \cdot t^2,\ t \in \mathbb{R}$

Bemerkung: $\mathbb{P}_{n\leq 2}$ ist der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen maximal 2. Grades.

Aufgabe 5 (2)
Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $A : V \to W$ eine lineare Abbildung, wobei B_0 eine Basis von Kern A ist. B_0 kann zu einer Basis B von V erweitert werden, da Kern A ein Unterraum von V ist. Zeigen Sie, dass $A(B \backslash B_0) = \{A(v) : v \in B \backslash B_0\}$ eine Basis von Bild A ist. Benutzen Sie diese Aussage, um in Aufgabe 3 und Aufgabe 4 jeweils Basen für die Bilder der linearen Abbildungen zu finden.

Aufgabe 6 (2)
Bestimmen Sie für die folgenden Abbildungen jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes:

a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x, y) \mapsto (2x + y, 0, 2x + y, 0, ...)$

b) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $x \mapsto (x, 2x, 3x, ...)$

c) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x, y) \mapsto (2x - 2y, 4x - 4y, 8x - 8y, ...)$

d) $A : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1 + 3x_3, 2x_2 + 4x_4)$

e) $A : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1, 0, x_3, 0, ...)$

f) $A : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6, ...)$